УДК 517.43

Н. А. Бритов

СПЕКТР И ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОГО ОПЕРАТОРА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ

В работе рассмотрены вопросы строения множества точек спектра нелинейного вполне непрерывного оператора, зависящего от двух вещественных числовых параметров, отображающего банахово пространство в себя. Методами теории вращения вполне непрерывных векторных полей получены условия сплошности спектра. Получены условия, достаточные для того, чтобы характеристическая точка линеаризованного оператора была точкой бифуркации нелинейного оператора.

Пусть E — банахово пространство, $\|\cdot\|$, Θ — норма и нулевой элемент в E. Рассматривается нелинейный вполне непрерывный оператор $F(\lambda): E \to E$; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ — вещественные числовые параметры. Предполагается, что $F(\lambda)\,\Theta = \Theta$ и $F = (\lambda) = \Phi(\lambda) + \Omega(\lambda)$, где $\Phi(\lambda)$ — линейный, вполне, непрерывный непрерывно дифференцируемый по λ_1, λ_2 в окрестности точки $\lambda = 0$ оператор, а $\Omega(\lambda)$ удовлетворяет в шаре $\|u\| < r_0$ условию

$$\|\Omega(\lambda)\,u_1 - \Omega(\lambda)\,u_2\| \leqslant q(r)\,\|u_2 - u_1\|; \quad \|u_1\|,\ \|u_2\| < r < r_0, \tag{1}$$

где $q(r)$ $(r > 0)$ — неубывающая функция и $\lim\limits_{r\to 0} q(r) = 0$ равномерно по λ из окрестности точки $\lambda = 0$ [1]. Предполагается также, что $\lambda = 0$ — характеристическая точка оператора $\Phi(\lambda)$ [2].

Цель статьи — изучение множества точек бифуркации и спектра оператора $F(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda = 0$ в зависимости от строения корневого подпространства $\Phi(0)$ и спектра $\Phi(\lambda)$. Такая задача возникает, в частности, при исследовании бифуркации решений краевых задач магнитной гидродинамики. Частный случай, когда размерность собственного подпространства $\Phi(0)$ совпадает с числом параметров, исследован в [3] методом функционализации параметра [1].

Как следует из результатов [2], спектр $\Phi(\lambda)$ может состоять либо из изолированной точки $\lambda = 0$, либо из p характеристических кривых, проходящих через эту точку.

1. Случай изолированной характеристической точки. Пусть $\lambda = 0$ — изолированная характеристическая точка $\Phi(\lambda)$. Тогда можно указать окрестность Σ_0 точки $\lambda = 0$, в которой для всех $0 \neq \lambda \in \Sigma_0$ поля $\Phi_\lambda u = u - \Phi(\lambda)\,u$ невырождены на единичной сфере в E и гомотопны на ней. Поэтому индекс неподвижной точки Θ полей $F(\lambda)\,u$ одинаков для всех $0 \neq \lambda \in \Sigma_0$. Этот общий индекс обозначается γ_0. Дословным повторением рассуждений [1] доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть 0 — изолированная характеристическая точка $\Phi(\lambda)$; индекс нулевой точки поля $u - F(0)u$ не равен γ_0. Тогда $\lambda = 0$ — точка бифуркации оператора $F(\lambda)$; спектр $F(\lambda)$ сплошной (содержит двумерную клетку на плоскости (λ_1, λ_2)) и существуют $\varepsilon, \rho > 0$, такие, что множество собственных элементов $u(\lambda)$ образует непрерывную ветвь в ε-окрестности Θ, причем точки спектра, отвечающие этим элементам, заполняют множество $\Sigma_\rho = \{\lambda : \lambda \in \Sigma_0,\ 0 \neq |\lambda| < \rho\}$.

Как показывает пример

$$\xi_1 = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2^2\xi_2 + \xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$
$$\xi_2 = \lambda_2\xi_2 - \lambda_2^2\xi_2 - \xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

теорема может не иметь места, если индекс совпадает с γ_0. В примере изолированная характеристическая точка (1, 0) оператора, построенного по линейной части системы, не является точкой спектра нелинейного оператора и в ее окрестности система имеет только тривиальное решение.

2. Случай характеристических кривых. Пусть через точку $\lambda = 0$ проходят p характеристических кривых $l_1, l_2, \ldots, l_p$. Эти кривые делят открытый круг достаточно малого радиуса $\rho_0 > 0$ на $2p$ открытых секторов Σ_i ($i = 1, 2, \ldots, 2p$) (ρ_0 выбирается так, чтобы Σ_i не содержали характеристических точек $\Phi(\lambda)$). Очевидно, индексы нулевой точки полей $u - F(\lambda)u$ одинаковы для всех $\lambda \in \Sigma_i$. Эти общие индексы обозначаются γ_i. Из результатов [2] следует, что для каждой l_i существует такое $\rho_i > 0$, что при всех $0 < |\lambda| < \rho_i$ размерности собственных подпространств операторов $\Phi(\lambda)$ одинаковы. Общим следует считать случай, когда корневые подпространства $\Phi(\lambda)$ $(\lambda \in l_i,\ 0 < |\lambda| < \rho_i)$ совпадают с собственными [3]. Для дальнейших рассмотрений потребуются следующие факты [1]. Пусть λ — характеристическая точка $\Phi(\lambda)$, P_λ — проектор на корневое подпространство $\Phi(\lambda)$, $Q_\lambda = I - P_\lambda$, Θ — изолированная особая точка поля $u - F(\lambda)u$. Тогда индекс Θ равен индексу нулевой точки поля [1]:

$$\chi(\lambda)u = -P_\lambda\Omega(\lambda)(u + R_\lambda u), \quad u \in P_\lambda E.$$

Здесь $R_\lambda : P_\lambda E \to Q_\lambda E$ задается следующим образом: решение уравнения $Q_\lambda u = \Gamma_\lambda Q_\lambda \Omega(\lambda)(P_\lambda u + Q_\lambda u)$, $\Gamma_\lambda = [Q_\lambda(I - \Phi(\lambda))Q_\lambda]^{-1}$ имеет вид $Q_\lambda u = R_\lambda P_\lambda u$, $u \in E$, $\|u\| \leqslant r$; при этом $\|R_\lambda u\| = o(\|u\|)$. Оператор R_λ можно построить методом итераций [1]. Пусть точка $\lambda \in l_i$ и $P_\lambda^{(i)}$ — проектор, отвечающий $\lambda \in l_i$. Тогда

$$\chi_0^{(i)}u = -P_0^{(i)}\Omega(0)(u + R_0 u); \quad P_0^{(i)} = \lim_{l_i \ni \lambda \to 0} P_\lambda^{(i)}, \quad R_0 = \lim_{l_i \ni \lambda \to 0} R_\lambda$$

Справедливо утверждение.

Лемма. Пусть для всех $\lambda \in l_i$, $|\lambda| < \rho$ корневые подпространства оператора $\Phi(\lambda)$ совпадают с собственными. Пусть Θ — изолированная особая точка поля $\chi_0^{(i)}u$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\lambda \in l_i$, $|\lambda| < \delta_i$: а) Θ — изолированная особая точка полей $\chi_\lambda^{(i)}u$; б) индексы особой точки Θ полей $\chi_0^{(i)}u$ и $\chi_\lambda^{(i)}u$ одинаковы.

Доказательство. Кривая λ_i однопараметрическая: $\lambda_i = \lambda_i(s)$, $\lambda(0) = 0$; $|\lambda(s)| < \rho$, $|s| < \varepsilon$.

Оба утверждения будут доказываться одновременно. Требуется доказать, что для достаточно малых s индексы нулевых особых точек полей $\chi_0^{(i)}u$, $u \in P_0^{(i)}E$ и $\chi^{(i)}(s)u = \chi^{(i)}(\lambda(s))u$, $u \in P_{\lambda(s)}^{(i)}E$ одинаковы.

Поскольку $\dim P_{\lambda(s)}^{(i)}E = \dim P_0^{(i)}E$, существует линейный обратимый оператор $T_s : P_0^{(i)}E \to P_{\lambda(s)}^{(i)}E$, определитель матрицы которого положителен. Наряду с полем $\chi^{(i)}(s)u$, $u \in P_{\lambda(s)}^{(i)}E$ рассматривается поле $\chi^{(i)}(s)T_s u = \chi_T u$, $u \in P_0^{(i)}E$. Сначала устанавливается равенство индексов полей $\chi^{(i)}(s)u$ и $\chi_T u$. Поле $\chi_T u$ представляется в виде $\chi_T u = \chi^{(i)}(s)u + \tilde{\chi}u$, где

$$\tilde{\chi}u = -P_0^{(i)}\{\Omega(0)[T_s u + R_{\lambda(s)}T_s u] - \Omega(\lambda(s))[u + R_{\lambda(s)}u]\} -$$

$$-[P^{(i)}_{\lambda(s)}-P^{(i)}_0]\,\Omega(0)\,[T_su+R_{\lambda(s)}T_su]+\{P^{(i)}_{\lambda(s)}\Omega(\lambda(s))\,[T_su+R_{\lambda(s)}T_su]-$$
$$-p^{(i)}_{\lambda(s)}\Omega(0)\,[T_su+R_{\lambda(s)}T_su]\}.$$

Из свойств $\Omega(\lambda)$ следует оценка

$$\|\tilde{\chi}u\|\leqslant q(r)\,[\,\|(T_su-u)\|+\|R_{\lambda(s)}T_su-R_0u\|\,]+\|P^{(i)}_{\lambda(s)}-P^{(i)}_0\|\,q(r)\,\|T_su+$$
$$+R_{\lambda(s)}u\|+\|\Omega(\lambda(s))\,[T_su+R_{\lambda(s)}T_su]-\Omega(\lambda(s))\,[T_su+R_{\lambda(s)}T_su]\|. \qquad (2)$$

Из определения оператора R_λ получается

$$\|R_{\lambda(s)}T_su-R_0u\|=\|\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}Q^{(i)}_{\lambda(s)}\Omega(\lambda(s))\,(T_su+R_{\lambda(s)}T_su)-\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0\Omega(0)\,(u+$$
$$+R_\lambda u)\|\leqslant\|\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}Q^{(i)}_{\lambda(s)}-\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0\|\,\|\Omega(\lambda(s))\,(T_su+R_{\lambda(s)}T_su)\|+\|\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0\|\times$$
$$\times\|\Omega(\lambda(s))\,(T_su+R_{\lambda(s)}T_su)-\Omega(0)\,[T_su+R_{\lambda(s)}T_su]\|+$$
$$+\|\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0\|\,q(r)\,[\,\|T_su-u\|+\|R_{\lambda(s)}T_su-R_0u\|\,].$$

Отсюда для достаточно малых r и $\|u\|\leqslant r$

$$\|R_{\lambda(s)}T_su-R_0u\|\leqslant\frac{1}{1-q(r)}\{\,\|(\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}Q^{(i)}_{\lambda(s)}-\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0)\,\Omega(\lambda(s))\,(T_su+R_{\lambda(s)}T_su)\|+$$
$$+\|\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0\|\,\|\Omega(\lambda(s))\,(T_su+R_{\lambda(s)}T_su)-\Omega(\lambda(s))\,(T_su+R_{\lambda(s)}T_su)\|+$$
$$+q(r)\,\|\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0\|\,\|T_su-u\|\}.$$

Подстановка этой оценки в (2) дает

$$\|\tilde{\chi}u\|\leqslant q(r)\left[\left(1+\frac{q(r)}{1-q(r)}\|\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0\|\right)\|u-T_su\|+\right.$$
$$+\frac{1}{1-q(r)}\|(\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}Q^{(i)}_{\lambda(s)}-\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0)\,\Omega(\lambda(s))\,(T_su+R_{\lambda(s)}T_su)\|+\|P^{(i)}_{\lambda(s)}-P^{(i)}_0\|\,\|T_su+$$
$$\left.+R_{\lambda(s)}T_su\|\right]+\left(1+\frac{\|\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0\|}{1-q(r)}\right)\|\Omega(\lambda(s))\,(T_su+R_{\lambda(s)}T_su)-\Omega(0)\,(T_su+$$
$$+R_{\lambda(s)}T_su)\|. \qquad (3)$$

С помощью оценки (3) можно убедиться, что

$$\lim_{s\to 0}\|\tilde{\chi}u\|=0 \qquad (4)$$

на сфере $\|u\|=r$ в $P^{(i)}_0E$. В силу компактности сферы в конечномерном банаховом пространстве достаточно доказать, что (4) выполняется для любого $\|u\|=r$. В силу непрерывности спектрального проектора по норме операторов по параметрам λ оператор T_s можно задать так, что если e_k ($k=1,2,\ldots,\dim P^{(i)}_0E$), базисный элемент $P^{(i)}_0E$, то $Te_k=P_{\lambda(s)}e_k$. Поэтому $\lim\limits_{s\to 0}\|(T_s-I)\,u\|=0$. Из оценки

$$\|(\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}Q^{(i)}_{\lambda(s)}-\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0)\,u\|\leqslant\|(Q^{(i)}_{\lambda(s)}-Q^{(i)}_0)\,\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0u\|+\|\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}Q^{(i)}_{\lambda(s)}\,[\Phi(\lambda(s))-$$
$$-\Phi(0)]\,Q^{(i)}_{\lambda(s)}\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0u\|+\|\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}Q^{(i)}_{\lambda(s)}\,[I-\Phi(0)]\,(Q^{(i)}_{\lambda(s)}-Q^{(i)}_0)\,\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0u\|+$$
$$+\|\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}Q^{(i)}_{\lambda(s)}\{Q^{(i)}_{\lambda(s)}u-Q^{(i)}_{\lambda(s)}Q^{(i)}_0\,[I-\Phi(0)]\,Q^{(i)}_0\Gamma^{(i)}_0Q^{(i)}_0u\}\|\leqslant\{\,\|P^{(i)}_{\lambda(s)}-P^{(i)}_0\|\,\|\Gamma^{(i)}_0\|+$$
$$+\|\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}\|\,\|\Phi(\lambda(s))-\Phi(0)\|\,\|\Gamma^{(i)}_0\|+(1+\|\Phi(0)\|)\,\|\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}\|\,\|\Gamma^{(i)}_0\|\,\|P^{(i)}_{\lambda(s)}-P^{(i)}_0\|+$$
$$+\|\Gamma^{(i)}_{\lambda(s)}\|\,\|P^{(i)}_{\lambda(s)}-P^{(i)}_0\|\,\}\,\|u\|,\quad u\in E \qquad (5)$$

непрерывности спектрального проектора, $\Omega(\lambda)$, $\Phi(\lambda)$ по λ по норме операторов и оценки (3) следует (4). Из (4) следует, что для достаточно малых δ и $|s|<\delta$ нулевая точка поля $\chi_T u$ изолированна, и, в силу теоремы Руше, ее индекс равен индексу нулевой точки поля $\chi^{(i)}_0u$. Из изолированности нулевой точки поля $\chi_T u$ и определения оператора T следует изолированность нулевой точки поля $\chi^{(i)}(s)\,u$ и равенство индексов нулевых точек этих полей. Для завершения доказательства остается выбрать δ наименьшим среди δ_i, определенных для каждой характеристической кривой.

Пусть сектор Σ_i лежит между характеристическими кривыми l_i и l_{i+1}. Индекс нулевой точки поля $\chi_0^{(i)}$ и обозначается $\bar{\gamma}_i$, а индекс нулевой точки поля $u - F(0)u - \gamma$. Тогда из леммы следует утверждение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия леммы. Пусть среди чисел γ; $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_p$; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$; γ_{2p} имеются различные. Тогда $\lambda = 0$ — точка бифуркации оператора $F(\lambda)$ и спектр оператора $F(\lambda)$ сплошной.

Из теоремы 2 следует, что если для некоторого i числа γ_i, $\bar{\gamma}_i$, γ_{i+1} не совпадают, то кривая l_i целиком заполнена точками бифуркации. Может оказаться, что в условиях теоремы 2 $\lambda = 0$ будет точкой бифуркации даже в случае четной размерности корневого подпространства оператора $\Phi(0)$. Например, это возможно, когда размерность соответствующего собственного подпространства равна 1.

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа.— М. : Наука, 1970.— 511 с.
2. *Бритов Н. А.* Спектр линейного вполне непрерывного оператора, зависящего от двух параметров // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1985.— Вып. 3(37).— С. 56—60.
3. *Козякин В. С., Красносельский М. А.* Метод функционализации параметра в задачах о точках бифуркации // Докл. АН СССР.— 1980.— 254, № 5.— С. 1061—1064.

Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины,
Донецк

Получено 15.11.90